YÜZEYLER TEORİSİ QUİZ SINAVI (12.11.2019)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) Şekil operatörünü tanımlayınız ve şekil operatörünün lineer olduğunu gösteriniz**(50P).**

3.) $Z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu nokta $(0, 1, 0)$ noktasına en yakın nokta olsun(Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanılacak) **(50P.).**

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 40 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

C-1) Tanım (Şekil Operatörü): E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı $N=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. $\chi(M)$, M nin vektör alanları uzayı; $T_M(P)$, M nin P noktasındaki tanjant uzayı ve D, E^n de Riemann konneksiyonu olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N = (X[a_1], \dots, X[a_n])$$

veya bir P noktasındaki değeri ile

$$S_P(X_P) = D_{X_P} N_P = (X_P[a_1], \dots, X_P[a_n])$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M nin şekil operatörü; S_P ye P noktasında şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir.

Şimdi S şekil operatörünün lineer olduğunu gösterelim:

$\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$S(aX+bY) = D_{aX+bY} N, \quad D \text{ Riemann Kon. old. dan,}$$

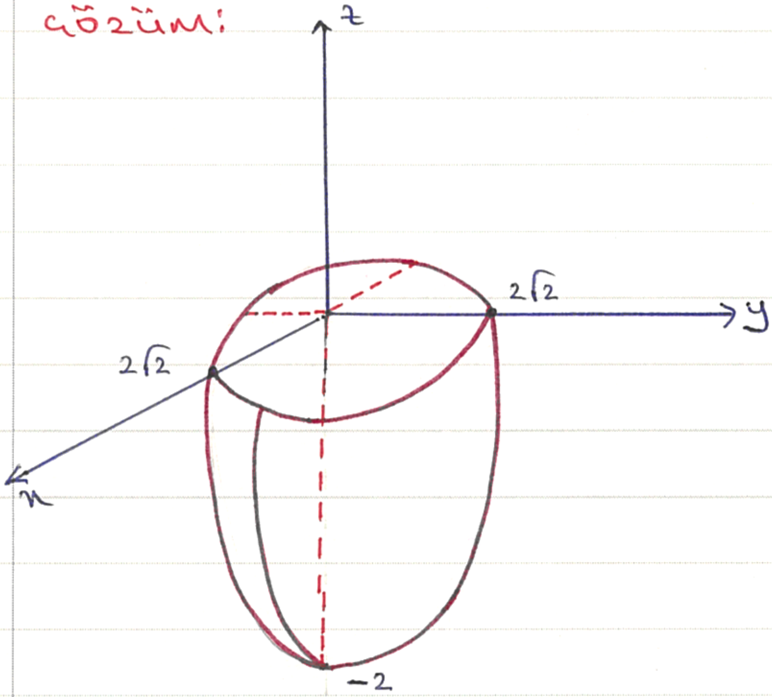
$$= a D_X N + b D_Y N$$

$$= a S(X) + b S(Y)$$

bulunur. O halde S dönüşümü lineerdir.

Soru 2: $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun (Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanınız).

Çözüm:



$$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2 \Rightarrow z=\frac{x^2+y^2-8}{4}$$

$\Rightarrow x^2+y^2-4z-8=0$ bulunur.

Buradan,

$g(x,y,z)=x^2+y^2-4z-8=0$

ve (x,y,z) ile $(0,1,0)$ noktaları arasındaki uzaklık ifadesinden

$f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$

yazabiliriz.

$\nabla g=(2x,2y,-4)$,

$\nabla f=(2x,2(y-1),2z)$

olduğundan Lagrange çarpan teoreminden

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

veya buradan

$$(x,y-1,z)=\lambda(x,y,-2)$$

olup, söz konusu noktada

$$\begin{cases} x=\lambda x \\ y-1=\lambda y \\ z=-2\lambda \\ x^2+y^2-4z=8 \end{cases}$$

sağlanmalıdır. Eğer $x\neq 0$ ise $\lambda=1$ olur. Bu ise $y-1=\lambda y$ den $-1=0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $x=0$ olmalıdır. $x=0$, $y=\frac{1}{1-\lambda}$, $z=-2\lambda$ değerini son denklemde yerine yazarsak

$$0+\frac{1}{(1-\lambda)^2}-4(-2\lambda)=8 \Rightarrow \frac{1+8\lambda(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2}=8$$

$$\Longrightarrow 8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$$

1/2	8	-24	24	-7
		4	-10	7
	8	-20	14	0

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(8\lambda^2 - 20\lambda + 14) = 0$

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(4\lambda^2 - 10\lambda + 7) = 0$

$4\lambda^2 - 10\lambda + 7 = 0$ denkleminin köklerini araştıralım:

$\Delta = b^2 - 4ac$ den $\Delta = 100 - 4.4.7 = -12 < 0$ olduğundan kökler sanaldır. Buna göre,

$8\lambda^3 - 24\lambda^2 + 24\lambda - 7 = 0$ denkleminin yalnız bir reel kökü vardır ve o da $\lambda = \frac{1}{2}$ dir.

Buna göre, f için M üzerinde $z = -1$, $x = 0$ ve $x^2 + y^2 - 4z = 8$ den $0 + y^2 - 4.(-1) = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \mp 2$.

$A_1 = (0, -2, -1)$, $A_2 = (0, 2, -1)$ noktaları kritik noktalardır.

$f(A_1) = 10$, $f(A_2) = 2$ olduğundan; $A_2 = (0, 2, -1) \in M$ noktası $(0, 1, 0)$ noktasına M üzerinde en yakın noktadır.

$\lambda = \frac{1}{2}$ için $z = -2\lambda$ dan $z = -2.\frac{1}{2} = -1$.